Exercice 1: Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$.

1. Un mot de p lettres (ayant un sens ou non) avec un alphabet de n lettres est une application d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Il y a donc n^p mots de la sorte.

2. Un mot de p lettres distinctes avec un alphabet de n lettres est une application injective d'un ensemble à p éléments dans un ensemble à n éléments. Il y a donc A_n^p mots de la sorte.

3. Un palindrome est caractérisé par les $\frac{p}{2}$ premières lettres si p est pair et les $\frac{p+1}{2}$ premières lettres si p est impair. Il y a donc $n^{\frac{p}{2}}$ palindromes si p est pair et $n^{\frac{p+1}{2}}$ si p est impair.

Exercice 2:

1. Un tiercé dans l'ordre est une application injective de $[\![1\,;3]\!]$ dans $[\![1\,;20]\!]$. Le nombre de tiercé possible dans l'ordre est égal à $\mathrm{A}_{20}^3 = 20 \times 19 \times 18 = 6840$.

2. Le nombre de tiercé possible dans le désordre est égal à $\binom{20}{3} = \frac{\mathrm{A}_{20}^3}{3!} = 1140$.

Exercice 3:

Un anagramme de "orange" est une application bijective de 6 éléments dans un ensemble à 6 éléments. Il y a donc $6! = 720$ anagrammes du mot orange.
Pour les anagrammes du mot ananas, si on permute deux lettres identiques, on trouve le même mot. On doit donc diviser le nombre total de permutations par le nombres de permutations entre lettres identiques. Il y a donc $\frac{6!}{3!2!} = 60$ anagrammes du mot ananas.

Exercice 4: Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$.

1. Il y a 2^n applications de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;2]\!]$. Parmi elles, deux seulement sont non-surjectives (les applications constantes). Donc il y a $2^n - 2$ applications surjectives de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;2]\!]$.

2. Il y a 3^n applications de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;3]\!]$.
   Les applications non-surjectives peuvent être classées selon le nombre de valeurs différentes qu'elles prennent:
   - soit elles prennent exactement 2 valeurs, qu'on peut choisir de $\binom{3}{2} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois $2^n - 2$ application de la sorte,
   - soit elles prennent une seule valeurs qu'on peut choisir de $\binom{3}{1} = 3$ façons différentes, et il y a à chaque fois une seule application de la sorte (application constante).
   Il y a donc $3^n - 3 \times (2^n - 2) - 3 = 3^n - 3 \times 2^n + 3$ applications surjectives de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;3]\!]$.

3. Les applications surjectives de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$ sont bijectives. Il y a donc $n!$ applications surjectives de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1\,;n]\!]$.

Exercice 5: Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.

   (a) Il y a $\binom{15}{5} = 3003$ tirages possibles.

   (b) Il y a $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3} = 1200$ tirages qui donnent 2 boules blanches et 3 boules noires.

2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.

   (a) En tenant compte de l'ordre, il y a $\mathrm{A}_{15}^5 = 360360$ tirages possibles.

(b) Il y a $\mathrm{A}_5^2 \times \mathrm{A}_{10}^3 = 14400$ tirages composés de 2 boules blanches puis 3 boules noires. Il y a donc $14400 \times \binom{5}{2} = 144000$ tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque (où $\binom{5}{2}$ correspond au choix de la position des boules blanches, la position des boules noires étant fixée si celle des blanches l'est).

Exercice 6:

Il y a 0 diagonale dans un triangle et 2 diagonales dans un quadrilatère convexe. De plus, si on note u_n le nombre de diagonales dans un polygone à n côtés ($n \geqslant 3$), on a alors $u_{n+1} = u_n + n - 1$ pour tout $n \geqslant 3$ (car en rajoutant un sommet, on crée $n-1$ diagonales supplémentaires). On en déduit que our tout $n \in [\![3, +\infty[\![$:

$$u_n = u_3 + \sum_{k=3}^{n-1}(k-1) = \sum_{j=2}^{n-2} j = \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1 = \frac{n(n-3)}{2}.$$

Par l'absurde, supposons qu'il existe un polygone convexe admettant 3333 diagonales. Donc il existe $n \in [\![3, +\infty[\![$ tel que $\frac{n(n-3)}{2} = 3333$ i.e. $n(n-3) = 6666$. Or 6666 est divisible par 3 mais pas par 9 ce qui est impossible pour $n(n-3)$. Il n'existe pas de polygone convexe admettant 3333 diagonales.

Exercice 7:

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ est 2^n.
   Le cardinal de l'ensemble des parties de E ayant un nombre pair d'éléments est :
   $$\sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\right) = \frac{1}{2}(2^n + 0) = 2^{n-1}.$$
   Donc E possède $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$ parties de cardinal impair.
   Donc E possède autant de parties de cardinal pair que de parties de cardinal impair.

2. $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = \sum_{Y\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(\overline{Y}) = \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(\overline{X}).$
   Donc $\displaystyle 2\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \big(\mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(\overline{X})\big) = \sum_{X\in\mathcal{P}(E)} n = n2^n.$
   D'où $\displaystyle\sum_{X\in\mathcal{P}(E)} \mathrm{Card}(X) = n2^{n-1}.$

3. $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap Y) = \sum_{(X,Z)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap \overline{Z}) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap \overline{Y}).$
   Donc
   $$\begin{aligned} 2\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap Y) &= \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \big(\mathrm{Card}(X\cap Y) + \mathrm{Card}(X\cap\overline{Y})\big) \\ &= \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X) = 2^n \times n2^{n-1} = n2^{2n-1} \end{aligned}$$
   D'où $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cap Y) = n2^{2n-2}.$

4. $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cup Y) = \sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} (\mathrm{Card}(X) + \mathrm{Card}(Y) - \mathrm{Card}(X\cap Y)) = n2^{2n-1} + n2^{2n-1} - n2^{2n-2}.$
   D'où $\displaystyle\sum_{(X,Y)\in\mathcal{P}(E)^2} \mathrm{Card}(X\cup Y) = 3n2^{2n-2}$

Exercice 8: Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. En nommant les n droites $D_1, ..., D_n$, il y a $n-1$ points d'intersections sur D_1. Il y a ensuite $n-1$ points d'intersections sur D_2 mais le point d'intersection entre D_1 et D_2 a déjà été compté, donc on compte $n-1+n-2$ points d'intersection sur D_1 et D_2. Ainsi le nombre d'intersection que l'on obtient avec ces n droites est
$$n^2 - \sum_{k=0}^{n} k = \frac{2n^2 - n(n+1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$
ou plus simplement un point d'intersection est la donnée de 2 droites parmi ces n droites. Il y a donc $\binom{n}{2}$ intersections.

2. Dans cette configuration, le nombre d'intersection que l'on obtient avec ces n triangles est $\binom{n}{3}$.

Exercice 9: Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments.

1. Notons $S = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B\} = \bigcup_{k \in [\![0;n]\!]} \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B \text{ et } \operatorname{Card}(B) = k\}$.
L'union ci-dessus est disjointe et il y a $\binom{n}{k}$ possibilités pour le choix d'une partie B à k éléments dans E puis 2^k possibilités pour le choix d'une partie A dans B.
D'où $|S| = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k = 3^n$.

2. Notons $T = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \cap B = \emptyset\} = \{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset \overline{B}\} = \{(A,\overline{C}) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset C\}$.
Or $|\{(A,\overline{C}) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset C\}| = |\{(A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, A \subset B\}|$.
Donc $|T| = |S| = 3^n$.

3. Notons $R = \{(A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3,\ A,\ B \text{ et } C \text{ deux à deux disjoints et } A \cup B \cup C = E\}$.
On a $R = \{(A,B,\overline{A \cup B}) \in (\mathcal{P}(E))^3, A \cap B = \emptyset\}$.
Donc $|R| = |T| = 3^n$.

Exercice 10: *Série de Kempner.*
Considérons la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = 0$ si n contient le chiffre 9 en base 10 et $\frac{1}{n}$ sinon. Soit $k \in \mathbb{N}$, posons $D_k = \{n \in [\![10^k; 10^{k+1}[\![, u_n \neq 0\}$.

1. Les entiers à $k+1$ chiffres ne contenant pas de 9 ont un premier chiffre compris entre 1 et 8 et les k suivants entre 0 et 8, donc le cardinal de D_k est égal à 8×9^k.

2. Un majorant de $\{u_n, n \in D_k\}$ est $\frac{1}{10^k}$.

3. Soit $m \in \mathbb{N}$. $\displaystyle\sum_{n=1}^{10^{m+1}} u_n = 10^{-m-1} + \sum_{k=0}^{m} \sum_{n \in D_k} u_n \leqslant 10^{-m-1} + \sum_{k=0}^{m} \frac{8 \times 9^k}{10^k} = 10^{-m-1} + 8 \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{9}{10}\right)^k$.

4. La série $\sum u_n$ est une série à terme positif et ses sommes partielles sont majorées par $1 + 8\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 81$.
Donc la série de Kempner : $\sum u_n$ converge.

Exercice 11:

1. Dans cette tablette, un rectangle est déterminé de manière unique par ses côtés et donc par deux droites horizontales et deux droites verticales. Il y a $\binom{7}{2} = 21$ choix pour les droites horizontales et $\binom{4}{2} = 6$ choix pour les verticales. Donc il y a $21 \times 6 = 126$ rectangles dans cette tablette de chocolat.

2. Dans cette figure, un triangle est déterminé de manière unique par ses côtés et donc par une droite horizontale et deux droites issues du sommet. Il y a 5 choix pour la droite horizontale et $\binom{6}{2} = 15$ choix pour les verticales. Donc il y a $5 \times 15 = 75$ triangles dans cette figure.